

ВЫДЕРЖКИ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ПРОТОКОЛОВ

«В корзине лежат пять яблок. Как разделить их поровну между пятью лицами так, чтобы каждый получил по яблоку, и одно яблоко осталось в корзине?»

исп. Г.: «Надо где-то достать лишнее яблоко или как-то убрать одно лицо... Возможно, одно лицо отказывается от яблока... порежем четыре яблока очень мелко и дадим каждому по дефектному яблоку... Мы можем дать пятому корзину с яблоком...»; исп. К.: «Разделить четыре яблока между пятью лицами... украсть еще одно яблоко... один добровольно отказывается от яблока... пусть едят яблоки по кругу... корзина бездонная, и яблоки достать невозможно... Одно яблоко приклеено к корзине... Одному дать яблоко вместе с корзиной...»¹.

Исп. Н.: У мальчика столько сестер, сколько братьев, значит столько сестер, сколько братьев, количество одинаковое братьев и сестер. А у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько братьев и сестер у мальчика? У нас есть мальчик, у которого есть сестры и братья, включая ту сестру, у которой сестер в 2 раза меньше, чем братьев. Так...

У мальчика столько сестер, сколько братьев, значит столько сестер, сколько братьев, количество одинаковое братьев и сестер. А у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Вообще такое бывает? у меня такое ощущение, что у мальчика одна сестра и один брат, а у его сестры нет сестер. Может такое быть?

Э: Проверь.

И: Вдвое меньше, значит, тогда б ты написал, что у нее нет сестер. Раз у нее вдвое меньше, значит у мальчика может быть 2 сестры и 2 брата, а у девочки может быть... Нет что-то не то. Одна сестра и 2 брата. Нет. Предположим у нас есть мальчик, у которого есть 2 сестры и 2 брата. Значит всего у нас 3 мальчика в семье. Есть сестра, вот одна из этих сестер. Это у нас мальчик, это у нас девочка, одна из вот этих вот.

[показывает на схеме условий] Тогда у нее есть, соответственно, 1 сестра и 3 брата. Тогда моя гипотеза не подходит. Хорошо. А если предположим у него одна сестра и один брат. Нет. А это точно сестра этого мальчика, может, это другая девочка?

Э: Нет, все одна семья.

И: Одна семья. У мальчика столько сестер, сколько братьев. Ну ладно, попробуем решить примитивно через x . Допустим, что у сестры x братьев. Соответственно у нее будет $x/2$ сестер. Нет, нет. Глупости это.

Э: Вслух, пожалуйста. Какие версии?

И: Их нет пока, но будут. Я попробую еще раз поразмышлять, чтобы без x решить. У нас есть мальчик, у которого есть сестры и братья. Их одинаковое количество. Значит, в этой семье, все-таки, мальчиков на одного больше. У нас есть, предположим, x девочек, а мальчиков будет $x+1$. Это точно совершенно. x девочек. Соответственно другая пропорция. У сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Здесь у нас остается $x+1$. Мальчики никуда не деваются, но у нас есть девочка. Не может же быть полтора мальчика, полтора брата? Не может. Значит, должно быть четное количество, также как и девочек. Может быть девочки... Тогда не получается второе условие. Ну ладно. $x+1$ - это у нас количество мальчиков. У его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев $(x+1)/2$. Значит, у нас есть из этого x общего, нет это не x , тогда у нас тут... а нет x .

Э: Что у тебя x ?

И: « x » у меня количество девочек, а $x+1$ количество мальчиков. Надо записать второе условие. Получается чудовищная формула. x это у меня общее количество девочек. Если из него я вычту сестер моей девочки, то что у меня получится? Ничего. Ну, все равно попробую хотя бы это записать. Если этих сестер у меньше в 2 раза, чем братьев. И это равно единице. [пишет: $x-(x+1)/2=1$] Получится конечно бред, наверное не правильно. Получится $x-1=(x+1)/2$; $2x-x=x+1$; $x=3$ Так не бывает. А может быть... Трех он равен-то. Да $x=3$. Проверим, если у меня 3 сестры, 4 брата. 3 сестры 4 брата, одну сестру убираем, получается 2 сестры 4 брата.

¹ Многоточиями обозначены паузы. Реплики экспериментатора опущены.

Таблица 1. Виды регулярных задач (математика-алгебра 2-8 классы).

	<i>Описание вида задач</i>	<i>Примеры</i>	<i>Способ решения</i>	<i>Соотношение неизвестных</i>
1	Функциональные зависимости различного вида устроены так, что все неизвестные (включая искомый ответ) заданы только через численно определенные величины.	Самолет пролетел расстояние между двумя аэродромами за 6 ч со скоростью 850 км/ч. За сколько времени пролетит это расстояние другой самолет, скорость которого на 150 км/ч больше скорости первого? (Чесноков, Нешков, 2002, вар 1 №178)	1) $850+150=1000$ км/ч 2) $850*6=5100$ км 3) $5100/1000=5,1$ ч.	Отсутствует
1с		В 1-й вазе 18 груш, во 2-й – в два раза меньше, а в 3-й вазе столько груш, сколько в 1 и 2-й вместе. Сколько всего груш в трех вазах? (Шклярова, 2000, №44-2)	1) $18/2=9$ гр. 2) $18+9=27$ гр. 3) $18+9+27=54$ груши	Отсутствует
2	Функциональные зависимости различного вида устроены так, что задано количественное соотношение между двумя неизвестными величинами: одна неизвестная величина задана через другую. При этом имеет место два соотношения неизвестных.	Скорость товарного поезда 38 км в час, а пассажирского 57 км в час. Первый вышел со станции А на 7 часов раньше второго, но второй обогнал его и пришел на станцию В двумя часами раньше. Каково расстояние между городами А и В? (Крутецкий, 1968).	X – расстояние между городами $X/57+9=X/38$, X=1026 км	Неизвестны t_1 и t_2 1) $t_1 + 9 \text{ ч} = t_2$ 2) $s/v_2 - s/v_1 = 9 \text{ ч}$ $X/38 - X/57 = 9$
2с		Четыре гири весят вместе 40 кг. Определите вес самой тяжелой гири, если известно, что каждая из них в 3 раза тяжелее, более легкой (Крутецкий, 1968).	X – вес наименьшей гири $X+3X+9X+27X=40$ X=1 кг	Неизвестен вес каждой из 4 гирь 1) $v_1+v_2+v_3+v_4=40$ кг 2) $v_2=3v_1$, $v_3=3v_2$ и т.д.
3	Функциональные зависимости различного вида устроены так, что задано количественное соотношение между четырьмя неизвестными величинами: они попарно заданы друг через друга. Таким образом, имеет место два соотношения неизвестных между собой.	Автобус от вокзала поехал в аэропорт, находящийся в 40 км. Через 10 мин вслед поехала такси. Скорость такси на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найти скорости обоих, если в аэропорт они прибыли одновременно? (Алимов и др., 2003, стр. 132, №2).	X – скорость автобуса $40/(X+20) + 1/6 = 40/X$, X=60км/ч	Неизвестны t_1 и t_2 ; v_1 и v_2 1) $v_1+20 \text{ км/ч} = v_2$; X+20 2) $t_1+1/6 \text{ ч} = t_2$ $40/(X+20) + 1/6 = 40/X$
3с	Задач этого типа в указанных учебных курсах обнаружено не было			

Таблица 2. Константная структура переменной высокого порядка

Скорость товарного поезда 38 км в час, а пассажирского 57 км в час. Первый вышел со станции А на 7 часов раньше второго, но второй обогнал его и пришел на станцию В двумя часами раньше. Каково расстояние между городами А и В?			
<p>X – расстояние между городами</p> $X/38 - X/57 = 9,$ $X=1026 \text{ км}$	<p>X – время первого поезда в пути</p> $38X=57(X-9),$ $X = 27 \text{ ч}$	<p>X – время второго поезда в пути</p> $57X=38(X+9),$ $X = 18 \text{ ч}$	<p>X – время второго поезда в пути к моменту встречи</p> $57X=38(X+7), X=14\text{ч}$ <p>X – время второго поезда за последнюю часть пути</p> $57X=38(X+2), X=4\text{ч}$
<p>Неизвестны t_1 и t_2</p> <p>1) $t_1 - 9 \text{ ч} = t_2$</p> <p>2) $s/v_1 - s/v_2 = 9$</p>	<p>Неизвестны t_1 и t_2</p> <p>1) $t_1 - 9 \text{ ч} = t_2$</p> <p>2) $v_1 t_1 = v_2(t_1 - 9)$</p>	<p>Неизвестны t_1 и t_2</p> <p>1) $t_1 - 9 \text{ ч} = t_2$</p> <p>2) $v_2 t_2 = v_1(t_2 + 9)$</p>	<p>Неизвестны t_1 и t_2</p> <p>1) $t_{1a} - 7 \text{ ч} = t_{2a}$</p> <p>$t_{1b} - 2 \text{ ч} = t_{2b}$</p> <p>2) $v_2 t_{2a} = v_1(t_{2a} + 7)$</p> <p>$v_2 t_{2b} = v_1(t_{2b} + 2)$</p>

Система, лежащая в основании:

$$\begin{cases} v_1 t_1 = s \\ v_2 t_2 = s \\ t_1 - t_2 = 9 \text{ ч} \end{cases}$$

Виды ошибок:

- 1) *ошибки извлечения*: а) невозможность вычленивать функциональные связи, и, как следствие, отказ от построения основного отношения задачи, б) извлечение функциональных связей, соответствующих иному (обычно более простому) виду задачи² без построения основного отношения задачи или с неадекватным его построением, в) неадекватное вычленение одной или нескольких функциональных связей, отвечающих типу решаемой задачи, и, как следствие, отказ от построения или неверном построении основного отношения задачи, г) неспособность установить или неверное установление отношений между верно извлеченными функциональными связками³;
- 2) *ошибках решения*: а) неверные вычисления, б) путаница в единицах измерения, в) ошибочные подстановки числовых данных в формулу или в уравнение, г) неверные операции с дробями, д) ошибочное применение степеней, е) неверные алгебраические преобразования выражений и др.

² Удивительным образом эта ошибка в некоторых случаях приводит к правильному ответу. Например, некоторые регулярные задачи вместо составления линейного уравнения могут быть решены простым подбором.

³ Пятый тип ошибок (1д) не имеет отношения к инвариантам: он связан с фактическими ошибками в понимании условий задачи.

Таблица 3. Результаты экспериментов

Серия	Вид задачи	% успехов	Виды встретившихся ошибок	% от общего числа ошибок
I	1 (решение)	97,7 (18 из 19)	2а – 1	100
I	1 (составление аналогичной)	68,4 (13 из 19)	3 задачи других типов + 3 отказа	
I	1 (решение аналогичной)	92,3 (12 из 13)	2а - 1	100
I	1с (решение)	84,2 (16 из 19)	2а – 2 1б – 1	66,6 33,3
I	1с (составление аналогичной)	26,3 (5 из 19) 36,8 (7 из 19) - с дефектными формулировками	6 задач типа 1 (31,5 %) + 1 отказ	
		Из 3 человек, не решивших задачу 1с, ни один не смог правильно составить аналогичную.		
I	1с (решение аналогичной)	58,3 (7 из 12)	1б - 1 1в - 3 + 1 отказ	25 75
I	2 (решение)	0	1в - 12 + 7 отказов	100
I	2 (составление аналогичной)	0	4 задачи типа 1 + 12 отказов + 3 псевдозадачи	
I	2 (решение аналогичной)	-	-	-
II	1	91,7 (11 из 12)	1в – 2 1г – 1 1д – 2 2а – 2	
II	2	23,5 (4 из 17) все – подбором	1б – 31 1в – 1 1г – 1 1д – 5 2а – 4 2в - 1	
II	2с	0 (0 из 7)	1а – 1 1б – 5 1в – 6 1д – 5 2а – 2 2в – 3	
II	3	45,4 (5 из 11) все подбором	1а – 1 1б – 31 1в – 1 1д – 2 2а – 0	

